

Probabilités

I. Vocabulaire

Une **expérience aléatoire** est une expérience pour laquelle il est impossible de prévoir le résultat : celui-ci est soumis au hasard.

Une **issue**, appelée aussi éventualité, d'une expérience aléatoire est un des résultats possibles de l'expérience aléatoire. L'**univers** est l'ensemble des issues.

Un **événement** A est un ensemble d'issues : c'est une partie de de l'univers.

Exemple 1 : On lance un dé tétraédrique. Les faces sont numérotées 1 ; 2 ; 3 ; 3 (le 3 est présent sur 2 faces)

Les issues sont : 1 ; 2 ; 3

Liste des événements est : $\{1\}$ $\{2\}$ $\{3\}$ $\{1; 2\}$ $\{1; 3\}$ $\{2; 3\}$ $\{1; 2; 3\}$ et $\emptyset$ qu'on note aussi $\{\}$

Si on lance le dé et qu'on obtient 2, on dira que :

- 2 **réalise l'événement** $\{2; 3\}$. On note : $2 \in \{2; 3\}$. 2 réalise aussi $\{2\}$ $\{1; 2\}$ $\{2; 3\}$ $\{1; 2; 3\}$
- 2 **ne réalise pas** l'événement $\{1; 3\}$. On note : $2 \notin \{1; 3\}$. 2 ne réalise pas $\{1\}$ $\{3\}$ $\{1; 3\}$

Exemple 2 : On lance deux fois une pièce. On note après chaque lancer le résultat obtenu.

Les issues : $(P; F)$ $(F; P)$ $(P; P)$ $(F; F)$ qu'on note parfois plus simplement PF, FP, PP, FF

Les événements : et $\emptyset$ $\{PF\}$ $\{FP\}$ $\{FF\}$ $\{PP; FP\}$ $\{PP; PF\}$ $\{PP; FF\}$ $\{PF; FP\}$

$\{PF; FF\}$ $\{FP; FF\}$ $\{PP; PF; FP\}$ $\{FF; PF; FP\}$ $\{PP; FF; FP\}$ $\{PP; PF; FF\}$ $\{PP; PF; FP; FF\}$

Vigilance : $(1; 2)$ désigne un **couple** l'ordre a de l'importance. $(1; 2)$ et $(2; 1)$ sont des objets différents

$\{1; 2\}$ désigne une partie qui contient juste 1 et 2. L'ordre n'a pas d'importance : $\{1; 2\} = \{2; 1\}$

$[1; 2]$ désigne un intervalle qui contient tous les réels entre 1 (compris) et 2 (compris)

$\in$ se lit « appartient » et s'utilise entre un élément et un ensemble qui le contient : $\sqrt{2} \in [1; 2]$

$\subset$ se lit « inclus » et s'utilise entre deux ensembles : $[2; 4] \subset [1; 10]$

Par cœur : Soient A et B deux événements d'un même univers

L'ensemble vide, noté $\emptyset$, est l'**événement impossible** (aucune issue ne le réalise).

L'univers (qui est une « partie » de lui-même) est l'**événement certain** : toutes les issues le réalisent.



$A \cap B$ est l'événement formé des issues qui réalisent A **et** qui réalisent B

C'est-à-dire des issues communes à A et à B

$A \cap B$ se lit « A **et** B »



$A \cup B$ est l'événement formé des issues qui réalisent A **ou** qui réalisent B (ou les deux)

C'est-à-dire des issues qui sont dans A auxquelles on rajoute les issues qui sont dans B (en ne comptant qu'une seule fois les issues communes)

$A \cup B$ se lit « A **ou** B »



$\bar{A}$ est l'événement formé de toutes les issues qui ne réalisent pas A .

c'est-à-dire des issues qui ne sont pas dans A

$\bar{A}$ se lit « A barre ». C'est l'**événement contraire** de A .

$$A \cap \bar{A} = \emptyset$$

Un événement et son contraire ne peuvent se réaliser simultanément !

$$A \cup \bar{A} = \text{Univers}$$

Puisque toute issue de l'univers est soit dans A , soit dans $\bar{A}$

II. Loi de probabilité

Notion de probabilité des issues (rappel)

Définir une **loi de probabilité** pour une expérience aléatoire, dont l'univers est $\{e_1; e_2; \dots; e_n\}$, c'est associer à chaque issue e_i un nombre p_i de l'intervalle $[0; 1]$ tel que : $p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n = 1$

Le nombre p_i est appelé **probabilité de l'issue e_i** .

Exemple Une urne contient 3 boules noires et une boule bleue. On tire une boule au hasard et on note sa couleur.

Il semble raisonnable de choisir le modèle suivant : les boules sont indiscernables, le « hasard » est bien respecté, ...

Issues	Noire	Bleu
Probabilités	0,75	0,25

La loi n'est pas **équipartie** : chaque couleur n'a pas la même probabilité.

Une probabilité est toujours comprise entre 0 et 1 et **la somme des probabilités des issues vaut 1**.

Savoir-faire 1 : Savoir donner une loi de probabilité (donner les issues, donner la probabilité de chacune)

Un dé est truqué. La probabilité d'obtenir 6 est le double de celles d'obtenir 1, 2, 3, 4, ou 5.

Donner la loi de probabilité.

Correction : Appelons b la probabilité d'avoir 1 donc

Issues	1	2	3	4	5	6
Probabilités	b	b	b	b	b	$2b$

Or **la somme des probabilités de toutes les issues vaut 1**

Donc $b + b + b + b + b + 2b = 1$ donc $7b = 1$ donc $b = \frac{1}{7}$

La loi de probabilité est :

Issues	1	2	3	4	5	6
Probabilités	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$

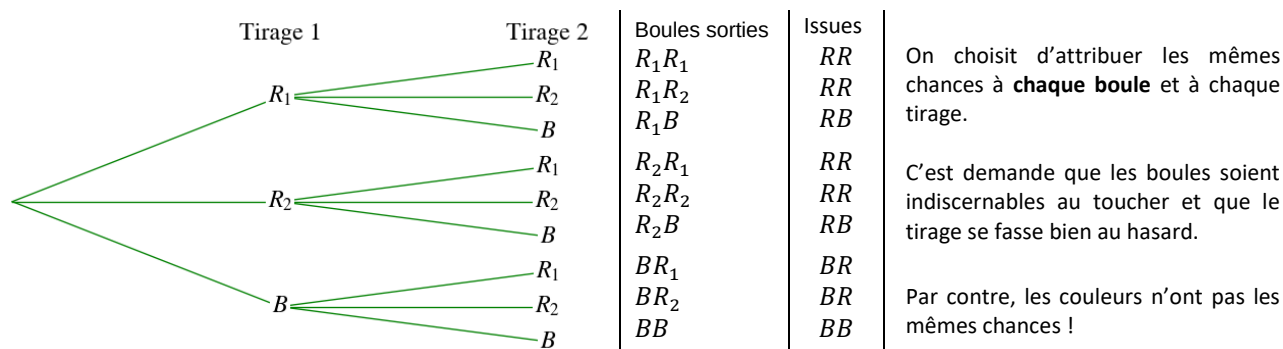
Savoir-faire 2 : Savoir donner une loi de probabilité (donner les issues, donner la probabilité de chacune)

Une urne contient deux boules rouges et une boule noire. On tire au hasard et **avec remise** deux boules.

Après chaque tirage, on note sa couleur. Donner la loi de probabilité.

Correction En **distinguant** les boules rouges

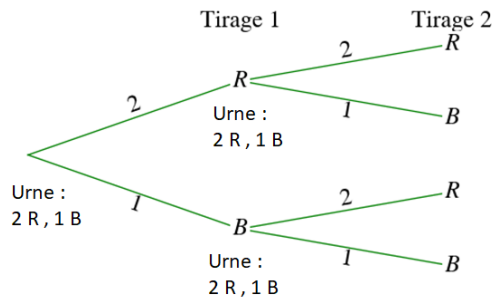
Si on numérotait au feutre les boules rouges, on pourrait appeler R_1, R_2, R_3, R_4 les boules rouges et cela ne changerait pas les chances d'être tirée (si les numéros sont bien indiscernables au toucher)



Loi de probabilité (on donne les issues et les probabilités):

Issues	RR	RB	BR	BB
Probabilités	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

Correction En ne distinguant pas les boules rouges (c'est l'arbre précédent en abrégé)



Issues	Possibilités	Probabilités
RR	$2 \times 2 = 4$	$\frac{4}{9}$
RB	$2 \times 1 = 2$	$\frac{2}{9}$
BR	$1 \times 2 = 2$	$\frac{2}{9}$
BB	$1 \times 1 = 1$	$\frac{1}{9}$
Au total 9 possibilités		Total : 1

On choisit d'attribuer les mêmes chances aux 9 possibilités.

Ce qui revient à donner à chaque boule (et non pas à chaque couleur) la même chance d'être tirée.

On retrouve bien les mêmes résultats qu'à la question précédente.

III. Probabilité d'un événement

Définition : La probabilité d'un événement A est la somme des probabilités des issues qui le réalisent.



Savoir-faire 3 : Savoir calculer la probabilité d'un événement dans le cas d'une loi équirépartie

Annabelle choisit une lettre au hasard parmi les 26 lettres de l'alphabet. Donner la probabilité des événements : A : « la lettre est une voyelle » et de B : « la lettre est présente dans son prénom »

Correction Précisons la loi de probabilité. Une issue est une lettre de l'alphabet. Il y a 26 issues. Comme le choix s'effectue au hasard, et sans doute avec un procédé qui ne favorise pas une issue, on choisit une loi **équirépartie** : chaque issue a une probabilité de $\frac{1}{26}$

Une première rédaction : Toujours possible

On a toujours : « la probabilité d'un événement d'un événement est la somme des probabilités des issues qui le réalisent »

$$A = \{a; e; i; o; u; y\} \text{ donc } P(A) = \frac{1}{26} + \frac{1}{26} + \frac{1}{26} + \frac{1}{26} + \frac{1}{26} + \frac{1}{26} = 6 \times \frac{1}{26} = \frac{6}{26}$$

$$B = \{a; n; b; e; l\} \text{ donc } P(B) = \frac{1}{26} + \frac{1}{26} + \frac{1}{26} + \frac{1}{26} + \frac{1}{26} = 5 \times \frac{1}{26} = \frac{5}{26}$$

Une seconde rédaction : Uniquement dans le cas d'une loi équirépartie

$$\text{Comme la loi est équirépartie, } A = \{a; e; i; o; u; y\} \quad P(A) = \frac{\text{nombre d'issues qui réalisent } A}{\text{nombre total d'issues}} = \frac{6}{26} = \frac{3}{13}$$

$$B = \{a; n; b; e; l\} \quad P(B) = \frac{\text{nombre d'issues qui réalisent } B}{\text{nombre total d'issues}} = \frac{5}{26}$$

IV. Calculs de probabilités

Propriétés (admisses)

1) Soit A un événement d'une expérience aléatoire dont l'univers (noté ici Ω).

$$0 \leq P(A) \leq 1 \quad P(\Omega) = 1 \quad P(\emptyset) = 0$$



2) On dit qu'on est en **situation d'équiprobabilité** lorsque toutes les issues ont la même probabilité.

Et dans ce cas très particulier $P(A) = \frac{\text{nombre d'issues qui réalisent } A}{\text{nombre total d'issues}}$



Théorème (admis)

Pour tout événements A et B ,

$$P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$$

Pour tout événement A ,

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$



Savoir-faire 4 : exemple d'un dé pipé (truqué)

On lance un dé truqué à 6 faces. La loi de probabilité est :

Issues	1	2	3	4	5	6
Probabilités	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$

On note : A désigne l'événement « le nombre obtenu est pair »

B désigne l'événement « le nombre obtenu est inférieur à 3 »

- 1) Calculer $P(A)$, $P(B)$, $P(\bar{A})$, $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$
- 2) Représenter sur un même diagramme les événements A , B , $A \cap B$
Représenter sur un même diagramme les événements A , B , $A \cup B$
Représenter sur un même diagramme les événements A , $\bar{A}$

Correction

Question 1

$$A = \{2; 4; 6\}$$

or la probabilité d'un événement d'un événement est la somme des probabilités des issues qui le réalisent

$$\text{donc } P(A) = P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{2}{7} = \frac{4}{7}$$

$$B = \{1; 2\} \text{ donc } P(B) = P(\{1\}) + P(\{2\}) = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = \frac{2}{7}$$

$$A \cup B = \{1; 2; 4; 6\}$$

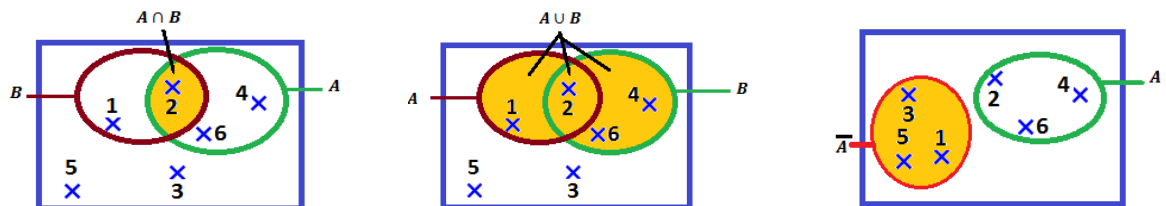
$$\text{donc } P(A \cup B) = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$$

$$\bar{A} = \{1; 3; 5\}$$

$$\text{donc } P(\bar{A}) = P(\{1\}) + P(\{3\}) + P(\{5\}) = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = \frac{3}{7}$$

$$A \cap B = \{2\} \text{ donc } P(A \cap B) = P(\{2\}) = \frac{1}{7}$$

Question 2



Savoir-faire 5

On réalise une expérience aléatoire. A et B sont deux événements tels que :

$$P(A) = 0,6$$

$$P(B) = 0,7$$

$$P(A \cap B) = 0,4$$

Calculer $P(\bar{A})$ et $P(A \cup B)$

Correction

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,6 = 0,4$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,6 + 0,7 - 0,4 = 0,9$$

Savoir-faire 6

A et B sont deux événements d'un même espace probabilisé tel que

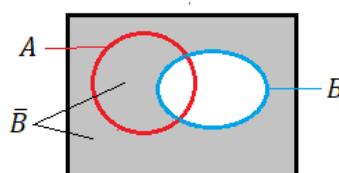
$$P(A) = 0,21 \quad P(B) = 0,84 \quad P(A \cup B) = 0,85$$

- 1) Quelle est la probabilité que « B ne se réalise pas » ?
- 2) Quelle est la probabilité que « A et B se réalisent simultanément » ?
- 3) Quelle est la probabilité que « ni A , ni B ne se réalisent » ?
- 4) Quelle est la probabilité que, « parmi A et B , au moins un des deux ne se réalise pas » ?
- 5) Quelle est la probabilité que « A se réalise mais pas B » ?
- 6) Quelle est la probabilité qu'« un seul des événements se réalise » ?

Une première correction

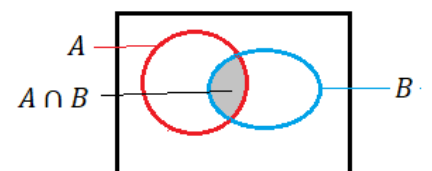
- 1) « B ne se réalise pas » se note $\bar{B}$

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0,84 = 0,16$$



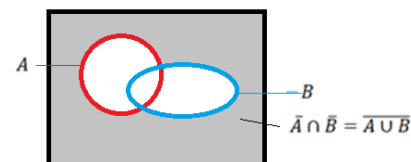
- 2) « A et B se réalisent simultanément » se note $A \cap B$

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,21 + 0,84 - 0,85 = 0,2$$



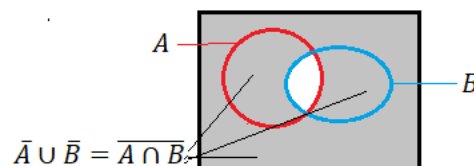
3) « ni A, ni B ne se réalisent » se note $\bar{A} \cap \bar{B}$ et on a : $\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,95 = 0,05$$



4) L'événement « parmi A et B, au moins un des deux ne se réalise pas » se note $\bar{A} \cup \bar{B}$ et on a : $\bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cap B}$

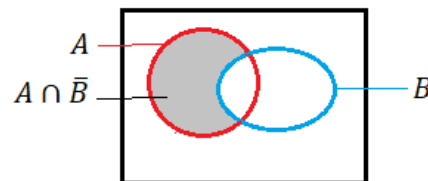
$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0,1 = 0,9$$



5) L'événement « A se réalise mais pas B » se note $A \cap \bar{B}$

En s'appuyant sur le schéma,

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0,21 - 0,1 = 0,11$$

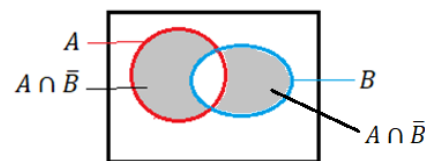


6) « Un seul des événements se réalise » se note $(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$

En s'appuyant sur le schéma,

$$P(A \cap \bar{B}) = P(B) - P(A \cap B) = 0,84 - 0,1 = 0,74$$

$$P((A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)) = P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B) = 0,74 + 0,11 = 0,85$$



Une seconde correction : à l'aide d'un tableau

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,21 + 0,84 - 0,95 = 0,2$$

	A	$\bar{A}$	Total
B	$P(A \cap B) = 0,2$	$P(\bar{A} \cap B) = 0,74$	$P(B) = 0,84$
$\bar{B}$	$P(A \cap \bar{B}) = 0,11$	$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,05$	$P(\bar{B}) = 0,16$
Total	$P(A) = 0,21$	$P(\bar{A}) = 0,79$	$P(\text{Univers}) = 1$

Dans le tableau précédent :

- en rouge, on a porté les données de l'énoncé et la probabilité de $A \cap B$ que l'on vient de calculer.
- $P(\bar{A})$ a été calculé en utilisant la formule $P(A) + P(\bar{A}) = 1$. De même, $P(\bar{B}) = 1 - P(B)$
- Les probabilités en noire sont faciles à déduire.

La zone coloriée correspond à $P(\bar{A} \cup \bar{B})$

Par lecture directe du tableau :

$$1) P(A \cap B) = 0,2 \quad 2) P(\bar{A} \cap B) = 0,74 \quad 3) P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,05 \quad 5) P(A \cap \bar{B}) = 0,11$$

En calculant d'après le tableau :

$$\begin{array}{l|l} 4) P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B) + P(\bar{A} \cap \bar{B}) \\ \quad = 0,11 + 0,74 + 0,05 = 0,9 & 6) P((A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)) = P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B) \\ & \quad = 0,11 + 0,74 = 0,85 \end{array}$$

V. Événements incompatibles

Définition On dit que deux événements A et B sont **incompatibles** quand $A \cap B = \emptyset$

C'est-à-dire, qu'ils n'ont aucune issue commune donc ils ne peuvent pas se réaliser simultanément.

Exemple : Un dé a douze faces numérotées de 1 à 12.

On lance le dé et on relève le numéro sorti.

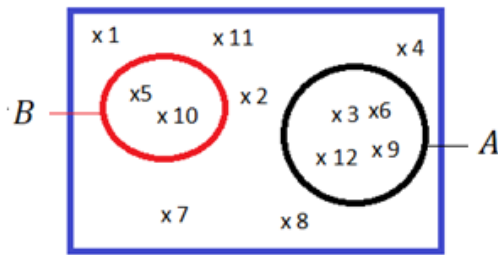
Soit A : « obtenir un multiple de 3 » et B : « obtenir un multiple de 5 »

1) Représenter sur un même diagramme les événements A et B



2) Que peut-on dire de ces deux événements ?

Exemple :



Aucune issue ne réalise à la fois A et B

$$A \cap B = \emptyset$$

Donc A et B sont incompatibles.

a

Propriétés

- 1) Soit A et B deux événements **incompatibles**. Dans ce cas **très particulier** $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- 2) Soit A et B deux événements. Les événements $B \cap \bar{A}$ et $B \cap A$ sont incompatibles
- 3) Soit A et B deux événements. $P(B) = P(\bar{A} \cap B) + P(A \cap B)$

Preuves (piste rouge) :

- 1) On a toujours $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
mais comme A et B sont incompatibles $A \cap B = \emptyset$ on a donc $P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$ donc $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

- 2) Raisonnons par l'absurde

Si on avait un élément commun à $A \cap B$ et $\bar{A} \cap B$,

Comme il est dans $A \cap B$, il serait dans A

Comme il est dans $\bar{A} \cap B$, il serait dans $\bar{A}$

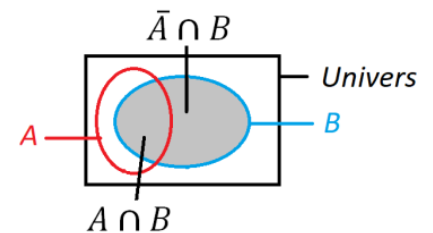
Il serait à la fois dans A et $\bar{A}$: contredit la définition de $\bar{A}$ (ensemble des issues qui ne sont pas dans A)

L'hypothèse doit être rejetée donc $A \cap B$ et $\bar{A} \cap B$ n'ont aucun élément en commun : leur intersection est vide.

- 3) Une issue de B est soit dans A , soit dans $\bar{A}$ mais pas dans les deux

donc $B = (\bar{A} \cap B) \cup (A \cap B)$

Comme $B \cap \bar{A}$ et $B \cap A$ sont incompatibles, $P(B) = P(\bar{A} \cap B) + P(A \cap B)$

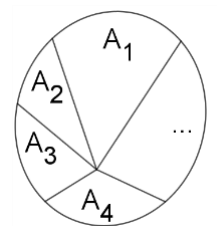


Partition (piste noire ... au programme de « spé math ») :

Définition

On dit que les parties $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ forment une **partition** d'un ensemble E lorsque :

- Elles sont **deux à deux** disjointes (leur intersection est vide : aucun élément commun)
- $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup \dots \cup A_n = E$ (tout élément de E est dans une des parties A_i)
(en général) on suppose aussi que les parties A_i ne sont pas vides



Dans le cas des probabilités, chaque issue de l'univers est **dans une et une seule** partie A_i

donc $P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = P(\text{Univers}) = 1$

Exemples dans le cadre des probabilités

- Les quatre parties $A \cap B$ et $\bar{A} \cap B$ et $A \cap \bar{B}$ et $\bar{A} \cap \bar{B}$ forment une partition de l'univers donc $P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) + P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1$
- $A \cap B$ et $\bar{A} \cap B$ forment une partition de B mais pas de l'univers (sauf cas particulier) donc $P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = P(B)$
- $A \cap B$ et $A \cap \bar{B}$ forment une partition de A mais pas de l'univers (sauf cas particulier) $P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = P(A)$
- A et $\bar{A}$ forment une partition de l'univers donc $P(A) + P(\bar{A}) = 1$

