

Ex 1 : Résoudre : $\frac{4-x}{4+x} \leq 5$ $5x \leq 20x^3$ $(5x+3)^2 > (3+7x)^2$

Ex 2 : Etudier le signe puis donner une interprétation graphique : $D(x) = \frac{4+x}{(3x+7)^2}$

Ex 3 : Etudier le signe de : $A(x) = \frac{1}{3-2x} + \frac{1}{3+2x}$ $B(x) = \frac{5x^2-x^3}{7x+3}$ $C(x) = \frac{13-3x}{9x^2-16}$

Ex 4 : Courbes : Soit f et g définie par : $f(x) = \frac{x^2-12}{x+2}$ et $g(x) = 5x - 6$

- 1) Donner l'ensemble de définition de f
- 2) Pour quelles valeurs de x , C_f est-elle en-dessous de l'axe des abscisses ?
- 3) Etudier les positions relatives de C_f et de C_g

Ex 1 Résoudre :

Résoudre $\frac{4-x}{4+x} \leq 5$

Stratégie (dans ma tête): Pour les inéquations avec l'inconnue au dénominateur, on utilise un tableau de signes.

$$\frac{4-x}{4+x} \leq 5 \Leftrightarrow \frac{4-x}{4+x} - 5 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{4-x}{4+x} - \frac{5(4+x)}{4+x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{4-x-20-5x}{4+x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-6x-16}{4+x} \leq 0$$

Tableau de signes

Valeurs de x	$-\infty$	-4	$-\frac{8}{3}$	$+\infty$	
Signe de $-6x - 16$ forme $mx + p$ avec $m = -6$	+	+	0	-	
	signe de $-m$			signe de m	
Signe de $4 + x$ forme $mx + p$ avec $m = 1$	-	0	+	+	
	signe de $-m$		signe de m		
Signe de $\frac{-6x-16}{4+x}$	-		+	0	-

L'ensemble des solutions est $] -\infty ; -4 [\cup [-\frac{8}{3} ; +\infty [$

Résoudre $5x \leq 20x^3$

Stratégie (dans ma tête): Pour les inéquations de degré supérieur à 1, on utilise un tableau de signes.

On commence par avoir 0 dans un membre (le signe dit si une expression est plus grande ou plus petite que 0)
Puis on factorise pour pouvoir utiliser la règle des signes (valable pour les multiplications et les divisions)

$$\begin{aligned}
 5x \leq 20x^3 &\Leftrightarrow 5x - 20x^3 \leq 0 &\Leftrightarrow 5 \times x - 5 \times 4 \times x \times x \times x \leq 0 \\
 &\Leftrightarrow 5x(1 - 4x^2) \leq 0 &\Leftrightarrow 5x(1^2 - (2x)^2) \leq 0 \\
 &\Leftrightarrow 5x(1 + 2x)(1 - 2x) \leq 0
 \end{aligned}$$

Tableau de signes

Valeurs de x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
Signe de $5x$ forme $mx + p$ avec $m = 5$ et $p = 0$	—	—	0	+	+
	signe de	$-m$		signe de m	
Signe de $1 - 2x$ forme $mx + p$ avec $m = -2$ et $p = 1$	+	+	+	0	—
		signe de	$-m$		signe de m
Signe de $1 + 2x$ forme $mx + p$ avec $m = 2$ et $p = 1$	—	0	+	+	+
	signe de	$-m$		signe de m	
$5x(1 + 2x)(1 - 2x)$	+	0	—	0	+
					—

L'ensemble des solutions est $[-\frac{1}{2}; 0] \cup [\frac{1}{2}; +\infty[$

Résoudre $(5x + 3)^2 > (3 + 7x)^2$

$$\begin{aligned}
 (5x + 3)^2 > (3 + 7x)^2 &\Leftrightarrow (5x + 3)^2 - (3 + 7x)^2 > 0 \\
 &\Leftrightarrow ((5x + 3) + (3 + 7x))((5x + 3) - (3 + 7x)) > 0 \\
 &\Leftrightarrow (12x + 6)(-2x) > 0
 \end{aligned}$$

Signe des facteurs

- $-2x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{0}{-2} \Leftrightarrow x \leq 0$
- $12x + 6 \geq 0 \Leftrightarrow 12x \geq -6 \Leftrightarrow x \geq -\frac{6}{12} \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$

On peut utiliser le résultat sur le signe de $mx + p$ si on préfère.

Tableau de signes

Valeurs de x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$
Signe de $-2x$	+	+	0	—
Signe de $12x + 6$	—	0	+	+
$-2x(12x + 6)$	—	0	+	0
				—

L'ensemble des solutions est $[-\frac{1}{2}; 0]$

Ex 2 : Etudier le signe puis donner une interprétation graphique :

Stratégie (dans ma tête): L'expression comporte la variable au dénominateur, on utilise un tableau de signes.

Signe des facteurs

- $(3x + 7)^2$ est toujours positif et s'annule pour $x = -\frac{7}{3}$

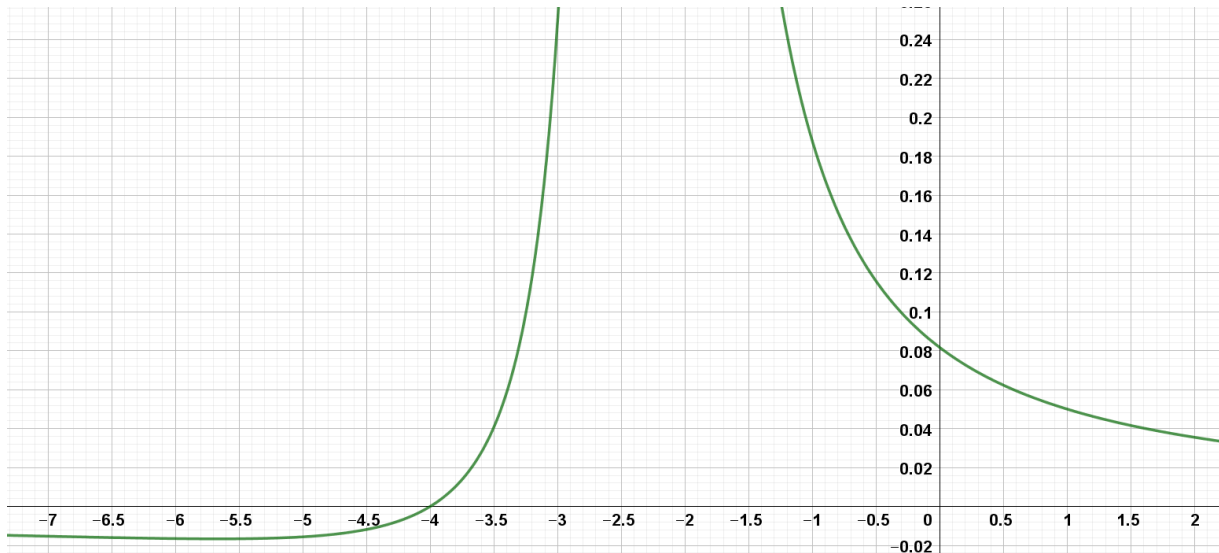
Tableau de signes

Valeurs de x	$-\infty$	-4	$-\frac{7}{3}$	$+\infty$
Signe de $4+x$ forme $mx+p$ avec $m=1$	$-$	0	$+$	$+$
	signe de $-m$		signe de m	
Signe de $(3x+7)^2$	$+$	$+$	0	$+$
Signe de $D(x)$	$-$	0	$ $	$+$

Conclusion et interprétation graphique

Soit C_D la courbe d'équation $y = D(x)$

- Pour $x \in]-4; -\frac{7}{3}[\cup]-\frac{7}{3}; +\infty[$ $D(x) > 0$ donc C_D est au-dessus de l'axe des abscisses
- Pour $x \in]-\infty; -4[$ $D(x) < 0$ donc C_D est en-dessous de l'axe des abscisses
- Pour $x = -\frac{7}{3}$ $D(x)$ n'est pas défini (n'existe pas à cause de la division par 0 !)
- Pour $x = -4$ $D(x) = 0$ donc C_D coupe l'axe des abscisses



Ex 3 Etudier le signe de :

Correction $A(x)$

Stratégie (dans ma tête): L'expression comporte la variable aux dénominateurs, on utilise un tableau de signes.

Réduction au même dénominateur

$$A(x) = \frac{1}{3-2x} + \frac{1}{3+2x} = \frac{3+2x}{(3-2x)(3+2x)} + \frac{3-2x}{(3-2x)(3+2x)} = \frac{6}{(3-2x)(3+2x)}$$

Tableau de signes

Valeurs de x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
Signe de 6	$+$	$+$	$+$	$+$
Signe de $3-2x$	$+$	$+$	0	$-$
Signe de $3+2x$	$-$	0	$+$	$+$
Signe de $A(x)$	$-$	$ $	$+$	$ $

Explications des signes

- $3 - 2x$ est de la forme $ax + b$ avec $a = -2$ et $b = 3$
donc $3 - 2x$ est du « signe de a , à droite du 0 (signe contraire sinon) »
- $3 + 2x$ est de la forme $ax + b$ avec $a = 2$ et $b = 3$
donc $3 + 2x$ est du « signe de a , à droite du 0 (signe contraire sinon) »

$$B(x) = \frac{5x^2 - x^3}{7x + 3}$$

$$C(x) = \frac{13 - 3x}{9x^2 - 16}$$

$$D(x) = \frac{4 + x}{(3x + 7)^2}$$

Conclusion

- Pour $x \in] -\infty ; -\frac{3}{2} [\cup] \frac{3}{2} ; +\infty [$ $A(x) < 0$
- Pour $x \in] \frac{-3}{2} ; \frac{3}{2} [$ $A(x) > 0$
- Pour $x = -\frac{3}{2}$ et $x = \frac{3}{2}$ $A(x)$ n'est pas défini (n'existe pas à cause de la division par 0 !)

Correction $B(x)$

Stratégie (dans ma tête): L'expression comporte la variable au dénominateur, on utilise un tableau de signes.

Factorisation $B(x) = \frac{5x^2 - x^3}{7x + 3} = \frac{5 \times x \times x - x \times x \times x}{7x + 3} = \frac{x^2(5 - x)}{7x + 3}$

Signe des facteurs

- x^2 est toujours positif et s'annule pour $x = 0$
- $5 - x$ est de la forme $ax + b$ avec $a = -1$ et $b = 5$
donc $5 - x$ est du « signe de a , à droite du 0 (signe contraire sinon) »
- $7x + 3$ est de la forme $ax + b$ avec $a = 7$ et $b = 3$
donc $7x + 3$ est du « signe de a , à droite du 0 (signe contraire sinon) »

Tableau de signes

Valeurs de x	$-\infty$	$-\frac{3}{7}$	0	5	$+\infty$		
Signe de x^2	+	+	0	+	+		
Signe de $5 - x$	+	+	+	0	-		
Signe de $7x + 3$	-	0	+	+	+		
Signe de $B(x)$	-		+	0	+	0	-

Conclusion

- Pour $x \in] -\infty ; -\frac{3}{7} [\cup] 5 ; +\infty [$ $B(x) < 0$
- Pour $x \in] \frac{-3}{7} ; 0 [\cup] 0 ; +\infty [$ $B(x) > 0$
- Pour $x = -\frac{3}{7}$ $B(x)$ n'est pas défini (n'existe pas à cause de la division par 0 !)
- Pour $x \in \{0 ; 5\}$ $B(x) = 0$

Correction $C(x)$

Stratégie (dans ma tête): L'expression comporte la variable au dénominateur, on utilise un tableau de signes.

Factorisation $C(x) = \frac{13-3x}{9x^2-16} = \frac{13-3x}{(3x)^2-4^2} = \frac{13-3x}{(3x+4)(3x-4)}$

Explication des signes

- $13 - 3x$ est de la forme $ax + b$ avec $a = -3$ et $b = 13$ donc est du « signe de a , à droite du 0 (signe contraire sinon) »
- $3x - 4$ est de la forme $ax + b$ donc est du « signe de a ($a = 3$), à droite du 0 (signe contraire sinon) »
- $3x + 4$ est de la forme $ax + b$ donc est du « signe de a ($a = 3$), à droite du 0 (signe contraire sinon) »

Tableau de signes

Valeurs de x	$-\infty$	$-\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{13}{3}$	$+\infty$		
Signe de $13 - 3x$	+	+	0	+	0	-	
Signe de $3x - 4$	-	-	0	+	+	+	
Signe de $3x + 4$	-	0	+	+	+	+	
Signe de $C(x)$	+		-		+	0	-

Conclusion

- Pour $x \in]-\infty ; -\frac{4}{3}[\cup]\frac{4}{3} ; \frac{13}{3}[$ $C(x) > 0$
- Pour $x \in]-\frac{4}{3} ; \frac{4}{3}[\cup]\frac{13}{3} ; +\infty[$ $C(x) > 0$
- Pour $x \in \{-\frac{4}{3} ; \frac{4}{3}\}$ $C(x)$ n'est pas défini (n'existe pas à cause de la division par 0 !)
- Pour $x = \frac{13}{3}$ $C(x) = 0$

Ex 4 : Courbes

Question 1

Pour calculer $f(x)$, on utilise une mise au carré, soustraction, addition : ces opérations sont toujours possibles. Mais on utilise une division que l'on peut toujours effectuer ... sauf la division par 0.

$$x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$$

Donc l'ensemble de définition de f est $] -\infty ; -2[\cup] -2 ; +\infty [$

Question 2 : C_f est en-dessous de l'axe des abscisses $\Leftrightarrow f(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-12}{x+2} < 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-\sqrt{12}^2}{x+2} < 0$
 $\Leftrightarrow \frac{(x+\sqrt{12})(x-\sqrt{12})}{x+2} < 0$

Remarque : $\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

Etude du signe des facteurs :

$$x + \sqrt{12} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\sqrt{12} \quad | \quad x - \sqrt{12} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \sqrt{12} \quad | \quad x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$$

Tableau de signes :

Valeurs de x	$-\infty$	$-2\sqrt{3}$	-2	$2\sqrt{3}$	$+\infty$	
Signe de $x + \sqrt{12}$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
Signe de $x - \sqrt{12}$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
Signe de $x + 2$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	
$\frac{(x+\sqrt{12})(x-\sqrt{12})}{x+2}$	$-$	0	$+$	$-$	0	$+$

C_f est en-dessous de l'axe des abscisses pour $x \in]-\infty ; -2\sqrt{3}[\cup]-2 ; -2\sqrt{3}[$

Question 3

Méthode pour la position relative :

- 1) On calcule la différence $f(x) - g(x)$
- 2) On étudie le signe de $f(x) - g(x)$
- 3) On conclue ...

$$\begin{aligned}
 f(x) - g(x) &= \frac{x^2-12}{x+2} - (5x-6) = \frac{x^2-12}{x+2} - 5x + 6 = \frac{x^2-12-5x(x+2)+6(x+2)}{x+2} = \frac{x^2-12-5x^2-10x+6x+12}{x+2} \\
 &= \frac{-4x^2-4x}{x+2} = \frac{4x(-x-1)}{x+2}
 \end{aligned}$$

Etude du signe des facteurs :

$$\begin{array}{l|l|l}
 4x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{0}{4} \Leftrightarrow x \geq 0 & \begin{array}{l} -x-1 \geq 0 \Leftrightarrow -x \geq 1 \\ \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{-1} \\ \Leftrightarrow x \leq -1 \end{array} & x+2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2
 \end{array}$$

Tableau de signes :

Valeurs de x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$	
Signe de $4x$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
Signe de $-x - 1$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	
Signe de $x + 2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$f(x) - g(x)$	$+$	$-$	0	$+$	0	$-$

Pour $x \in]-\infty ; -2[\cup]-1 ; 0[$

$f(x) - g(x) > 0$ donc $f(x) > g(x)$ donc C_f est au-dessus de C_g

Pour $x \in]-2 ; -1[\cup]0 ; +\infty[$

$f(x) - g(x) < 0$ donc $f(x) < g(x)$ donc C_f est en-dessous de C_g

Pour $x = -1$ et $x = 0$ $f(x) - g(x) = 0$ donc $f(x) = g(x)$ donc C_f et C_g se coupent.

Aucun point de C_f n'a pour abscisse -2