Chapitre 11 : probabilités conditionnelles

Situation 1

On tire au hasard une carte. On fait le choix de l'équiprobabilité. On considère les événements :

A: « la carte tirée au hasard a la lettre A »

E: « la carte tirée au hasard a une étoile »

R: « la carte tirée au hasard a un rond »

Situation 2
Statistiques

L'Insee (**I**nstitut **n**ational de la **s**tatistique et des **é**tudes **é**conomique) a publié en 2019 des chiffres sur la structure par âge des « cadres et des professions intellectuelles supérieures ».

Les ingénieurs (ou cadres techniques d'entreprises) représentaient 29,2 % des cadres. Voici la répartition des cadres ingénieurs (et assimilés) par âge ainsi que celles des cadres non ingénieurs.

	15 – 24 ans	25 – 49 ans	Plus de 50 ans	Total
Cadres ingénieurs	3,5 %	72,2 %	24,3 %	100 %
Cadres non ingénieurs	2,4 %	61,8 %	35,8 %	100 %

I. Résumé

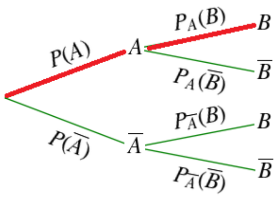
Une probabilité P est définie sur un univers E d'une expérience aléatoire

Probabilité conditionnelle : A et B deux événements avec $\boldsymbol{P(A) \neq 0}$.

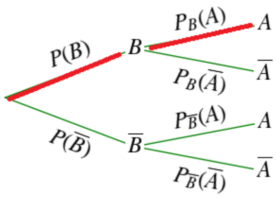
La probabilité de **l'événement B sachant** $\boldsymbol{A}$ est définie par : $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

et donc on a la formule $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$

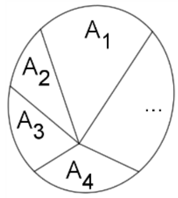
Remarque : Pour $P(A) \neq 0$ et pour $P(B) \neq 0$, $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A)$



$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$



$P(A \cap B)$



Partition d'un univers Les événements $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ forment une partition d'un univers E

- Ils sont deux à deux incompatibles (aucune issue commune)
- $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup \dots \cup A_n = E$ (toute issue de E est dans un événement A_i)

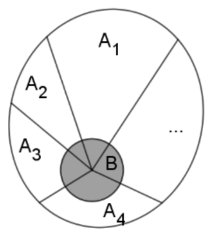
Formule des probabilités totales :

Soient $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ des événements d'un univers E.

On suppose que les événements $A_1, A_2, \dots, A_n$ forment une partition de E et que leurs probabilités sont non nulles. Pour tout événement B de E,

$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B) + \cdots P(A_n \cap B)$

On aura donc $P(B) = P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B) + \cdots + P(A_n) \times P_{A_n}(B)$



Définition : Les *événements* A et B sont dits *indépendants* lorsque $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Propriété 1) A et B sont deux événements tels que $P(A) \neq 0$

A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B) = P(B)$

Savoir que A se réalise ou savoir qu'il ne se réalise pas, n'influence pas les chances que l'on peut attribuer à B

2) A et B sont indépendants si et seulement si A *et* $\bar{B}$ le sont

II. Situation 1 pour comprendre (dans le cas d'un univers fini et de l'équiprobabilité)

On tire au hasard une carte. On fait le choix de l'équiprobabilité.
On considère les événements :

A: « la carte tirée au hasard a la lettre A »

E: « la carte tirée au hasard a une étoile »

R: « la carte tirée au hasard a un rond »

A chaque question, les tirages se font avec toutes les cartes.

1) Calculer $P_{\bar{A}}(E)$ — Réponse : $P_{\bar{A}}(E) = \frac{P(\bar{A} \cap E)}{P(\bar{A})} = \frac{\frac{6}{12}}{\frac{7}{12}} = \frac{6}{7}$

2) Calculer $P_E(\bar{A})$ — Réponse : $P_E(\bar{A}) = \frac{P(\bar{A} \cap E)}{P(E)} = \frac{\frac{6}{12}}{\frac{6}{12}} = 1$

3) Ursule tire une carte la regarde mais ne vous la montre pas.
Dans les cas suivants, estimez les chances pour que la carte tirée au hasard ait une étoile.

   a) Ursule ne donne aucune indication — Réponse : $P(A) = \frac{5}{12} \approx 0{,}417$

   b) Ursule vous indique que la carte tirée a un rond — Réponse : $P_R(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0{,}5$

   Commentaire : la probabilité de A est $0{,}417$. Mais si on sait en plus que la carte contient un rond, on peut affiner notre pronostic en tenant compte de ce renseignement : $P_R(A) = 0{,}5$

4) Dans les cas suivants, estimez les chances pour que la carte tirée au hasard ait un rond. Comment écrire le résultat en utilisant les événements ?

   a) Ursule ne donne aucune indication — Réponse : $P(R) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

   b) Ursule vous indique que la carte tirée a une étoile — Réponse : $P_E(R) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

   Commentaire : la probabilité de R est $\frac{1}{3}$. Le fait de savoir en plus que la carte contient une étoile ne change pas le pronostic …. Le fait de savoir que E se réalise ou non, n'influence pas la probabilité de R.
   On dira que R et E sont *indépendants* (définition plus précise plus loin).

III. Situation 2 pour travailler les savoir-faire

Statistiques

L'Insee (**I**nstitut **n**ational de la **s**tatistique et des **é**tudes **é**conomique) a publié en 2019 des chiffres sur la structure par âge des « cadres et des professions intellectuelles supérieures ».
Les ingénieurs (ou cadres techniques d'entreprises) représentaient 29,2 % des cadres. Voici la répartition des cadres ingénieurs (et assimilés) par âge ainsi que celles des cadres non ingénieurs.

	15 – 24 ans	25 – 49 ans	Plus de 50 ans	Total
Cadres ingénieurs	3,5 %	72,2 %	24,3 %	100 %
Cadres non ingénieurs	2,4 %	61,8 %	35,8 %	100 %

Il s'agit d'une étude statistique qui est la science du recueil de données réelles, leur traitement et leurs interprétations.
Il ne s'agit pas de probabilités car on n'a pas défini d'expérience aléatoire et pas choisi de modèle probabiliste.

Expérience aléatoire (voir les données issues de l'Insee)

Parmi tous les cadres travaillant en France en 2019, on en choisit un au hasard. On considère les événements :

- I: « le cadre tiré au hasard est un ingénieur (ou assimilé) »
- A_1 : « le cadre tiré au hasard est âgé de 15 à 24 ans »
- A_2 : « le cadre tiré au hasard est âgé de 25 à 49 ans »
- A_3 : « le cadre tiré au hasard est âgé de plus de 50 ans »

On choisit le cadre de l'équiprobabilité : tout cadre a la même probabilité d'être tiré au sort.

1) Donner $P(I)$, $P(\bar{I})$, $P_I(A_2)$, $P_{\bar{I}}(A1)$
2) On veut déterminer $P(A_1 \cap I)$; $\mathrm{P}(\mathrm{A}_1)$; $P_{A_1}(I)$. On pourra s'appuyer sur deux arbres.

Lecture de l'énoncé

1) $P(I) = \frac{29{,}2}{100} = 0{,}292$

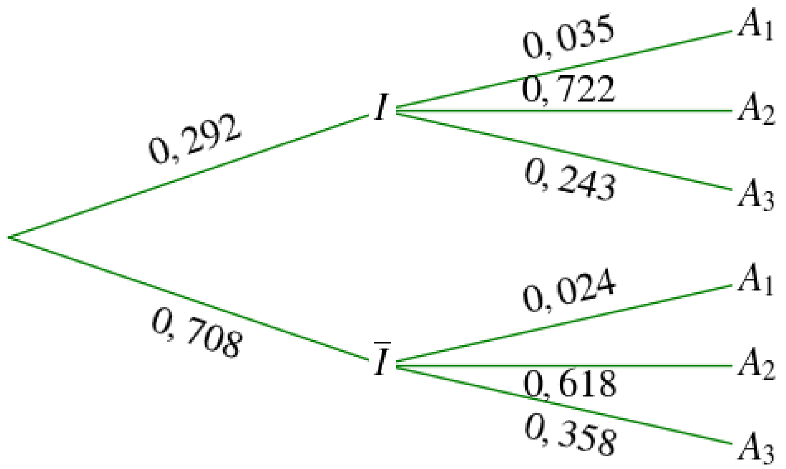
En tirant au sort parmi tous les cadres, la probabilité que ce soit un ingénieur est de 0,292

$P(\bar{I}) = 1 - P(I) = 1 - 0{,}292 = 0{,}708$

$P_I(A_1) = 0{,}035$ ce qui peut s'interpréter en imaginant une autre expérience aléatoire « en tirant au sort seulement parmi les fiches des cadres ingénieurs, la probabilité que la personne ait de 15 ans à 24 ans est 0,035

$P_{\bar{I}}(A_1) = 0{,}024$ ce qui peut s'interpréter en imaginant une autre expérience aléatoire « en tirant au sort seulement parmi les fiches des non ingénieurs, la probabilité que la personne ait de 15 ans à 24 ans est 0,024

Un premier arbre



$P(A_1 \cap I) = P(I) \times P_I(A_1)$
$= 0{,}292 \times 0{,}035 \approx 0{,}01$

$P(A_2 \cap I) = P(I) \times P_I(A_2)$
$= 0{,}292 \times 0{,}722 \approx 0{,}211$

$P(A_3 \cap I) = P(I) \times P_I(A_3)$
$= 0{,}292 \times 0{,}324 \approx 0{,}071$

$P(A_1 \cap \bar{I}) = P(\bar{I}) \times P_I(A_1)$
$= 0{,}708 \times 0{,}024 \approx 0{,}017$

$P(A_2 \cap \bar{I}) = P(\bar{I}) \times P_I(A_2)$
$= 0{,}708 \times 0{,}618 \approx 0{,}437$

$P(A_3 \cap \bar{I}) = P(\bar{I}) \times P_I(A_3)$
$= 0{,}708 \times 0{,}358 \approx 0{,}253$

Utilisation de la définition des probabilités conditionnelles

Comme $P_I(A) = \frac{P(A \cap I)}{P(I)}$ on a : $P(A_1 \cap I) = P(I) \times P_I(A_1) = 0{,}292 \times 0{,}035 \approx 0{,}01$

De même , $P(A_1 \cap \bar{I}) = P(\bar{I}) \times P(A_1) = 0{,}708 \times 0{,}024 \approx 0{,}017$

Utilisation de la formule des probabilités totales

I et $\bar{I}$ forment une partition car tout cadre est soit ingénieur soit pas ingénieur.

D'après la formule des probabilités totales :

$P(A_1) = P(A_1 \cap I) + P(A_1 \cap \bar{I}) = P(I) \times P_I(A_1) + P(\bar{I}) \times P_{\bar{I}}(A_1) \approx 0{,}01 + 0{,}017 \approx 0{,}027$

De même, $P(A_2) = P(A_2 \cap I) + P(A_2 \cap \bar{I}) = P(I) \times P_I(A_2) + P(\bar{I}) \times P_{\bar{I}}(A_2) \approx 0{,}211 + 0{,}437 \approx 0{,}648$

$P(A_3) = P(A_3 \cap I) + P(A_3 \cap \bar{I}) = P(I) \times P_I(A_3) + P(\bar{I}) \times P_{\bar{I}}(A_3) \approx 0{,}071 + 0{,}253 \approx 0{,}324$

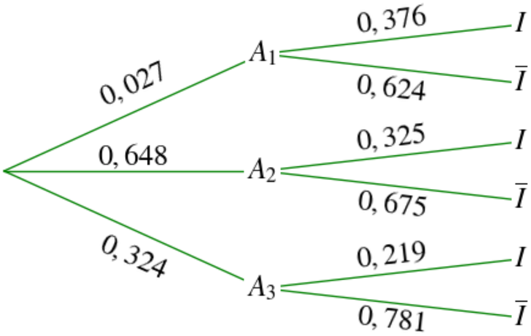
Utilisation de la définition des probabilités conditionnelles

Maintenant qu'on connait $P(A_1)$ et $P(A_1 \cap I)$ en appliquant la définition des probabilités conditionnelles,

$P_{A_1}(I) = \frac{P(A_1 \cap I)}{P(A_1)} \approx \frac{0{,}01}{0{,}027} \approx 0{,}37$ ce qui peut s'interpréter en imaginant que l'on calcule la probabilité que ce soit un ingénieur en « restreignant l'univers à A_1 »

Un deuxième arbre

On pourrait « renverser » le premier arbre.



Rappel (voir premier arbre)

$P(A_1 \cap I) \approx 0{,}01$ donc $P_{A_1}(I) = \frac{P(A_1\cap I)}{P(A_1)} \approx \frac{0{,}01}{0{,}027} \approx 0{,}37$

$P(A_1 \cap \bar{I}) \approx 0{,}017$ donc $P_{A_1}(\bar{I}) = \frac{P(A_1\cap \bar{I})}{P(A_1)} \approx \frac{0{,}017}{0{,}027} \approx 0{,}629$

$P(A_2 \cap I) \approx 0{,}211$ donc $P_{A_2}(I) = \frac{P(A_2\cap I)}{P(A_2)} \approx \frac{0{,}211}{0{,}648} \approx 0{,}326$

$P(A_2 \cap \bar{I}) \approx 0{,}437$ donc $P_{A_2}(\bar{I}) = \frac{P(A_2\cap \bar{I})}{P(A_2)} \approx \frac{0{,}437}{0{,}648} \approx 0{,}674$

$P(A_3 \cap I) \approx 0{,}071$ donc $P_{A_3}(I) = \frac{P(A_2\cap I)}{P(A_2)} \approx \frac{0{,}071}{0{,}324} \approx 0{,}219$

$P(A_3 \cap \bar{I}) \approx 0{,}253$ donc $P_{A_3}(\bar{I}) = \frac{P(A_3\cap \bar{I})}{P(A_3)} \approx \frac{0{,}253}{0{,}324} \approx 0{,}781$

IV. Situation 3: probabilité des causes (d'après Bac ES Liban 2015)

Enoncé *Les résultats seront arrondis, si nécessaire, à* 10^{-3}.

Une entreprise fabrique en grande quantité des médailles circulaires. La totalité de la production est réalisée par deux machines M_A et M_B.

- La machine M_A fournit 40 % de la production totale et M_B le reste.
- La machine M_A produit 2 % de médailles défectueuses et la machine M_B produit 3 % de médailles défectueuses.

On prélève au hasard une médaille fabriquée par l'entreprise.

Calculer la probabilité qu'une médaille soit produite par la machine M_A sachant qu'elle est défectueuse.

Solution On considère les événements suivants :

- A : « la médaille provient de la machine M_A
- D : «la médaille est défectueuse »

$P(A) = 0{,}4$ et donc $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 0{,}6$

$P_A(D) = 0{,}02$ donc $P(A \cap D) = P(A) \times P_A(D) = 0{,}02 \times 0{,}4 = 0{,}008$

$P_{\bar{A}}(D) = 0{,}03$ donc $P(\bar{A} \cap D) = P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(\bar{D}) = 0{,}03 \times 0{,}6 = 0{,}018$

Comme A et $\bar{A}$ forment une partition de l'univers, d'après la formule des probabilités totales :

$\boldsymbol{P(D) = P(A \cap D) + P(\bar{A} \cap D)} = P(A) \times P_A(D) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(\bar{D}) = 0{,}008 + 0{,}018 = 0{,}026$

On peut faire le calcul en seule étape avec la formule des probabilités totales comme ci-dessus

$P_D(A) = \frac{P(A\cap D)}{P(A)} = \frac{0{,}008}{0{,}026} \approx 0{,}308$

La probabilité pour que la **cause** de la « défectuosité de la pièce » est qu'elle ait été fabriquée par la machine A est : 0,308

V. **Situation 4** : faux négatifs et faux positifs (d'après bac ST2S Nouvelle-Calédonie novembre 2011)

Enoncé

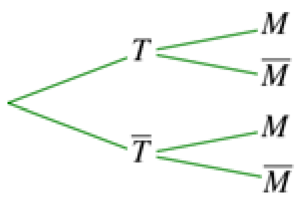
Un laboratoire propose un test de dépistage d'une certaine maladie.
Ce test présente les caractéristiques suivantes :
• la probabilité qu'une personne atteinte de cette maladie ait un test positif est de 0,97;
• la probabilité qu'une personne non atteinte de cette maladie ait un test négatif est de 0,99.

On souhaite procéder à un dépistage systématique dans une population donnée, au sein de laquelle s'est déclenchée une épidémie.
On admet que la proportion de personnes atteintes de la maladie dans cette population est 4 %.

On choisit une personne au hasard et on note :
• M l'évènement : « la personne choisie est atteinte de la maladie »
• T l'évènement : « la personne choisie a un test positif »

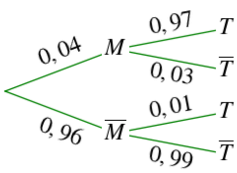
1) Sans justifier, représenter la situation par un arbre de probabilités.
2) Calculer la probabilité que la personne choisie soit malade et testée positive.
3) Calculer la probabilité que la personne choisie soit testée positive.
4) Calculer la valeur prédictive du test : la probabilité que la personne choisie soit malade sachant qu'elle est positive.
5) Calculer la probabilité que la personne choisie soit un «faux positif » : elle n'est pas malade sachant qu'elle est testée positive.
6) Calculer la probabilité que la personne choisie soit un «faux négatif » : elle est malade sachant qu'elle est testée négative.
7) Quelle est la probabilité que le test soit correct (le résultat prédit est correct) ?
8) Compléter

	M	$\overline{M}$	Total
T			
$\overline{T}$			
Total			



Réponses :

1) L'arbre le plus simple est :
$P(M) = 0{,}04$ donc $P(\overline{M}) = 1 - P(M) = 0{,}96$
$P_M(T) = 0{,}97$ donc $P_M(\overline{T}) = 0{,}03$
$P_{\overline{M}}(\overline{T}) = 0{,}99$ donc $P_{\overline{M}}(T) = 0{,}01$



2) D'après la définition des probabilités conditionnelles,
$P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T) = 0{,}04 \times 0{,}97 = 0{,}0388$.
La probabilité que la personne soit malade et testée positive est $\mathbf{0,0388}$

3) $P(\overline{M}) = 1 - P(M) = 1 - 0{,}04 = 0{,}96$ et donc $P(T \cap \overline{M}) = P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(T) = 0{,}96 \times 0{,}01 = 0{,}0096$
D'après la formule des probabilités totales
$P(T) = P(T \cap M) + P(T \cap \overline{M}) = P(T) \times P_M(T) + P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(T) = 0{,}0388 + 0{,}0096 = \mathbf{0,0484}$

4) D’après la définition des probabilités conditionnelles $P_T(M) = \frac{P(T\cap M)}{P(T)} = \frac{0,0388}{0,0484} \approx 0,8017$

La valeur prédictive de ce test est environ $\mathbf{0,8017}$

5) $P_T(M) + P_T(\overline{M}) = 1$ donc $P_T(\overline{M}) = 1 - P_T(M) \approx 1 - 0,8017 \approx \mathbf{0,1983}$

Avec ce test, il est probable qu’environ environ 20 % des personnes positives ne soient pas malades.

6) $P(\overline{T}) = 1 - P(T) = 1 - 0,0484 = 0,9516$ et $P(\overline{T} \cap M) = P(M) \times P_M(\overline{T}) = 0,04 \times 0,03 = 0,0012$

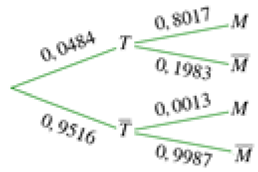
$P_{\overline{T}}(M) = \frac{P(\overline{T}\cap M)}{P(\overline{T})} = \frac{0,0012}{0,9516} \approx \mathbf{0,001}$ Il est très peu probable que le test ne détecte pas un malade.

7) $P(\overline{M} \cap \overline{T}) = P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(\overline{T}) = 0,96 \times 0,99 = 0,9504$ donc $P(M \cap T) + P(\overline{M} \cap \overline{T}) = 0,0388 + 0,9504 = 0,9892$

La probabilité que le test soit correct est : $\mathbf{0,9892}$

8) Compléter

	M	$\overline{M}$	Total
T	0,0388	0,0096	0,0484
$\overline{T}$	0,0012	0,9504	0,9516
Total	0,04	0,96	1



VI. Indépendance

Définition : Les *événements* A et B sont dits *indépendants* lorsque $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Propriété 1) Si A et B sont indépendants avec $P(A) \neq 0$ alors $\bar{A}$ et B le sont aussi

2) A et B sont deux événements tels que $P(A) \neq 0$

A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B) = P(B)$

Interprétation : *Savoir que A se réalise ou savoir qu’il ne se réalise pas, n’influence pas les chances que l’on peut attribuer à B*

Savoir prouver une proposition sous la forme «… *si et seulement si* …»

Preuve 1) Supposons A et B indépendants (C’est l’hypothèse entre le « si » et le « alors »)

A et $\bar{A}$ forment une partition, d’après la formule des probabilités totales : $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$

donc $P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$

Comme A et B sont indépendants : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Ainsi $P_{\bar{A}}(B) = \frac{P(\bar{A}\cap B)}{P(\bar{A})} = \frac{P(B) - P(A\cap B)}{P(\bar{A})} = \frac{P(B) - P(A)\times P(B)}{P(\bar{A})} = \frac{P(B)\times(1-P(A))}{P(\bar{A})} = \frac{P(B)\times P(\bar{A})}{P(\bar{A})} = P(B)$

Donc $P_{\bar{A}}(B) = P(B)$ C’est la conclusion du « *si … alors …* » que l’on trouve après le « *alors* »

Donc la proposition est prouvée : elle est vraie.

2) Prouver « A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B) = P(B)$ », revient à prouver deux propositions « si … alors … »

Savoir prouver une proposition sous la forme « *si … alors* »

- Prouvons que « *si A et B sont indépendants alors* $P_A(B) = P(B)$ »

  On se place sous l’hypothèse du « *si … alors …* » : supposons que A et B sont indépendants

  Donc par définition de l’indépendance, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

donc $P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{P(A)\times P(B)}{P(A)} = P(B)$

On en a déduit la conclusion du *« si … alors … » :* $P_A(B) = P(B)$ donc la proposition « si… alors … » est VRAIE

- Réciproquement, prouvons que « *si $P_A(B) = P(B)$ alors A et B sont indépendants* »

On se place sous l'hypothèse du « *si … alors …* » : supposons que $P_A(B) = P(B)$

Donc on a : $P(A\cap B) = P(A)\times P_A(B)$

Comme $P_A(B) = P(B)$ on a : $P(A\cap B) = P(A)\times P(B)$

donc A et B sont indépendants

On en a déduit la conclusion du *« si … alors … » :* A et B sont indépendants donc la proposition « si… alors … » est VRAIE

Exercice 1 A et B sont deux événements d'un univers. Dans chaque cas, préciser :

a) si A et B sont indépendants

b) si A et B sont incompatibles

Cas 1 :	$P(A) = 0{,}25$	$P(A\cap B) = 0{,}15$	$P(B) = 0{,}4$
Cas 2 :	$P(\bar{B}) = 0{,}4$	$P(\bar{A}\cap B) = 0{,}18$	$P(\bar{A}\cap\bar{B}) = 0{,}12$
Cas 3 :	$P(A\cup B) = 0{,}5$	$P(\bar{B}\cap A) = 0{,}2$	$P(\bar{A}) = 0{,}7$

Correction

Cas 1 **a)** $P(A)\times P(B) = 0{,}25\times 0{,}4 = 1$

Comme $P(A\cap B) = 0{,}15$ on a : $P(A\cap B) \neq P(A)\times P(B)$ donc A et B ne sont pas indépendants

En conséquence : $P_B(A) \neq P(A)$ et $P_A(B) \neq P(B)$

b) Comme $P(A\cap B) \neq 0$ on a : $A\cap B$ n'est pas vide

donc A et B ne sont pas incompatibles : ils peuvent se réaliser en même temps

En conséquence : $P(A) + P(B) \neq P(A) + P(B)$

mais on a bien : $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$

Cas 2 On peut compléter un tableau de proportionnalité à double entrées

On peut aussi faire directement les raisonnements ci-dessous (il y a plusieurs variantes possibles)

	A	$\bar{A}$	Total
B	*Etape 2* $P(A) - P(A\cap\bar{B})$ $= 0{,}3 - 0{,}3 = 0$	*Etape 3* $P(A\cup B) - P(A\cap B) - P(A\cap\bar{B})$ $= 0{,}5 - 0 - 0{,}3 = 0{,}2$	*Etape 4* $P(A\cap B) + P(\bar{A}\cap B)$ $= 0 + 0{,}2 = 0{,}2$
$\bar{B}$	$\mathbf{0{,}3}$	*Etape 5a* $P(\bar{A}) - P(\bar{A}\cap\bar{B}) = 0{,}7 - 0{,}2 = 0{,}5$	*Etape 5b* $1 - P(B) = 0{,}8$
Total	*Etape 1* $1 - P(\bar{A}) = 0{,}3$	$\mathbf{0{,}7}$	$\mathbf{1}$

En grisée, la partition de $A\cup B$

Justifications (la justification attendue est en non grisée mais vous pouvez lire le reste !):

- Etape 2 Comme les événements $A\cap B$ et $\bar{A}\cap B$ forment une partition de A

  Chaque issue de $A\cup B$ réalise aussi un et **un seul** événement parmi $A\cap B$ et $A\cap\bar{B}$

  C'est-à-dire : la réunion de $(A\cap B)$ et $(A\cap\bar{B})$ est A : $(A\cap B)\cup(A\cap\bar{B}) = A$

  L'intersection de $(A\cap B)$ et $(A\cap\bar{B})$ est vide : $(A\cap B)\cap(A\cap\bar{B}) = \emptyset$

  Donc $P(A\cap B) + P(A\cap\bar{B}) = P(A)$

  Donc $P(A\cap B) = P(A) - P(A\cap\bar{B}) = 0{,}3 - 02 = 0{,}1$

- Etape 3 Les trois événements $A\cap B$; $A\cap\bar{B}$; $\bar{A}\cap B$ forment une partition de $A\cup B$

  Chaque issue de $A\cup B$ réalise aussi un et **un seul** événement parmi $A\cap B$; $A\cap\bar{B}$ et $\bar{A}\cap B$

  - la réunion des trois ensembles est $A\cup B$: $A\cup B = (A\cap B) \cup (A\cap\bar{B}) \cup (\bar{A}\cap B)$
  - $A\cap B$; $A\cap\bar{B}$; $\bar{A}\cap B$ sont **deux à deux** disjoints :

$(A \cap B) \cap (A \cap \bar{B}) = \emptyset$, $(A \cap B) \cap (\bar{A} \cap B) = \emptyset$, $(\bar{A} \cap B) \cap (A \cap \bar{B}) = \emptyset$

Donc $P(\bar{A} \cap B) = P(A \cup B) - P(A \cap B) - P(A \cap \bar{B}) = 0{,}5 - 0 - 0{,}3 = 0{,}2$

- Etape 4 Les deux événements $A \cap B$ et $\bar{A} \cap B$ forment une partition de B
  Donc $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = 0 + 0{,}2 = 0{,}2$

- Etape 5a Les deux événements $\bar{A} \cap B$ et $\bar{A} \cap \bar{B}$ forment une partition de B
  Donc $P(\bar{A}) = P(\bar{A} \cap B) + P(\bar{A} \cap \bar{B})$
  Donc $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) - P(\bar{A} \cap B) = 0{,}7 - 0{,}2 = 0{,}5$

- Etape 5b Les deux événements B et $\bar{B}$ forment une partition de l'univers
  Donc $P(B) + P(\bar{B}) = 1$ donc $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$

a) A *et* B indépendants ?
$P(A) \times P(B) = 0 \times 0{,}3 \times 0{,}2 = 0{,}06$
Comme $P(A \cap B) = 0$, on a : $P(A \cap B) \neq P(a) \times P(B)$ donc A et B ne sont pas indépendants.

b) A *et* B incompatibles ?
$P(A \cap B) = 0$ donc $A \cap B = \emptyset$ donc A et B sont incompatibles.

Cas 3 Utilisons un tableau de probabilités à double entrée (mais on peut faire autrement)

	A	$\bar{A}$	Total
B	$0{,}42$	$\mathbf{0{,}18}$	$1 - 0{,}4 = 0{,}6$
$\bar{B}$	$0{,}4 - 0{,}12 = 0{,}28$	$\mathbf{0{,}12}$	$\mathbf{0{,}4}$
Total	$1 - 0{,}3 = 0{,}7$	$0{,}18 + 0{,}12 = 0{,}3$	$\mathbf{1}$

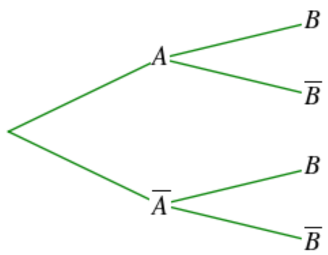
a) $P(A) \times P(B) = 0{,}6 \times 0{,}7 = 0{,}42$ ainsi $P(A) \times P(B) = P(A \cap B)$
donc A et B sont indépendants.

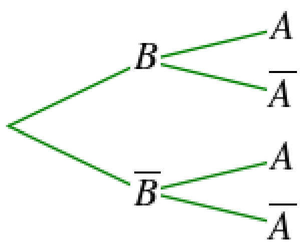
b) Comme $P(A \cap B) \neq 0$, on en déduit que : $A \cap B \neq 0$ donc A et B ne sont pas incompatibles

Exercice 2 : A et B sont deux événements **indépendants** tels que : $P(A) = 0{,}9$ et $P(B) = 0{,}8$.
Compléter le tableau et les arbres de probabilités

.

	A	$\bar{A}$	Total
B			
$\bar{B}$			
Total			1

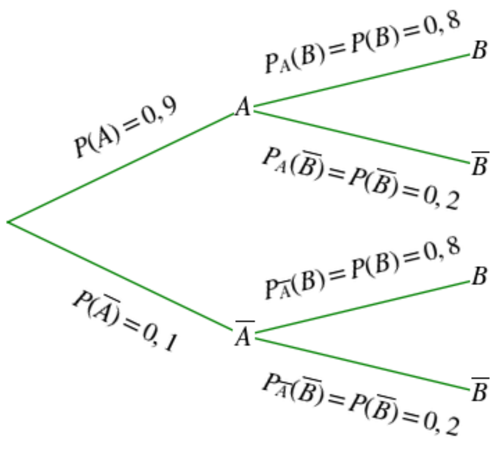


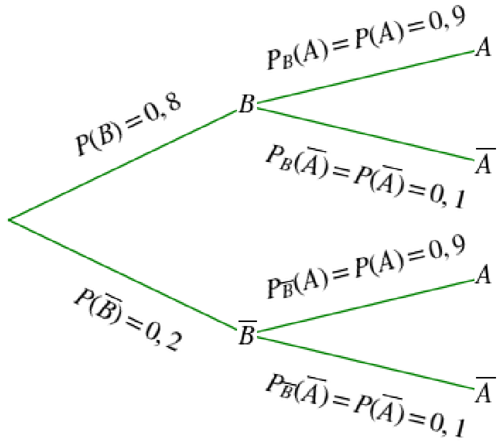


Correction : A et B sont indépendants implique
$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ et $P_A(B) = P(B)$ et $P_B(A) = P(A)$
$\bar{A}$ et B sont aussi indépendants donc $P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) \times P(B)$ et $P_{\bar{A}}(B) = P(B)$ et $P_B(\bar{A}) = P(\bar{A})$
$\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont aussi indépendants donc $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \times P(\bar{B})$ et $P_{\bar{A}}(\bar{B}) = P(\bar{B})$ et $P_{\bar{B}}(\bar{A}) = P(\bar{A})$
A et $\bar{B}$ sont aussi indépendants donc $P(A \cap \bar{B}) = P(A) \times P(\bar{B})$ et $P_A(\bar{B}) = P(\bar{B})$ et $P_{\bar{B}}(A) = P(A)$

	A	$\bar{A}$	Total
B	$0{,}8 \times \mathbf{0{,}9} = 0{,}72$	$\mathbf{0{,}1} \times 0{,}8 = 0{,}08$	$0{,}8$

$\overline{B}$	$0,9 \times 0,2 = 0{,}18$	$0,1 \times 0,2 = 0{,}02$	$0,2$
Total	$0,9$	$0,1$	1





VII. Succession de deux épreuves indépendantes

Considérons une expérience aléatoire qui consiste à **enchainer deux épreuves** aléatoires. Lorsque le résultat de la seconde ne dépend pas du résultat de la première, on dit que ce sont deux ***épreuves aléatoires indépendantes***

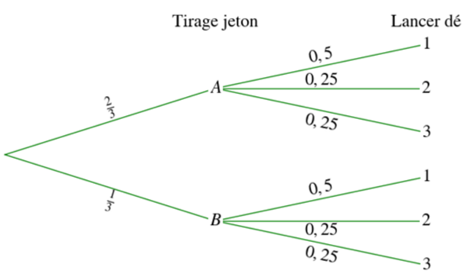
Remarquer que dans la première partie du cours, on parlait « d'événements indépendants » pas « d'épreuves indépendantes ».

Par exemples : Tirer successivement deux boules dans une urne **avec remise** après le premier tirage
Lancer deux fois de suite un dé ou une pièce.

Pour trouver les probabilités des issues de l'expérience, on peut utiliser un arbre (ou un tableau).

Savoir-faire : Un sac contient trois jetons marqués respectivement : A, A, B.
Un dé tétraédrique, supposé équilibré, a ses sommets numérotés : 1 ; 1 ; 2 ; 3
On tire d'abord un jeton puis on lance le dé. Déterminer les probabilités des issues.

Réponse



Issue	Probabilité
$(A\,;1)$	$\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$
$(A\,;2)$	$\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{6}$
$(A\,;3)$	$\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{6}$
$(B\,;1)$	$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$
$(B\,;2)$	$\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$
$(B\,;3)$	$\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$

Avec un tableau

dé / jeton	1	2	3	Total
A	$\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$
B	$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$
Total	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

Vigilance

Nous avons utilisé des arbres pour schématiser deux types de situation.

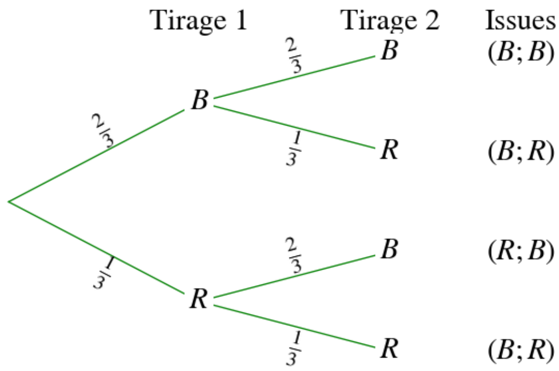
Exemple 1

Une urne contient 2 boules blanches et 1 rouge.

On tire au hasard avec remise deux boules.

A chaque tirage, le résultat apparait dans l'arbre.

Attention à l'ordre, l'issue $(B ; R)$ n'est pas la même que l'issue $(R ; B)$.

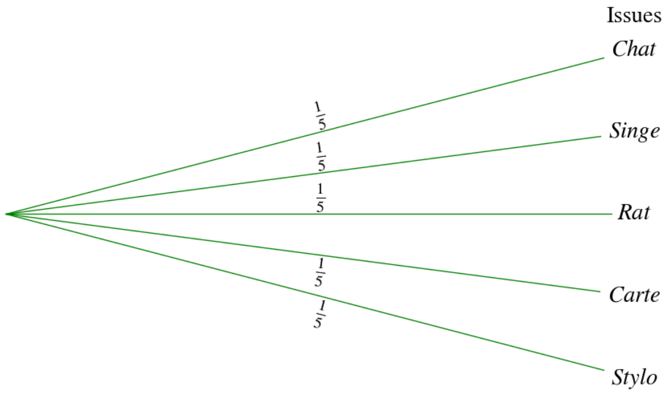


Exemple 2

Une urne contient 5 papiers marqués respectivement « chat », « rat », « singe », « carte », « stylo »

On tire au hasard un mot.

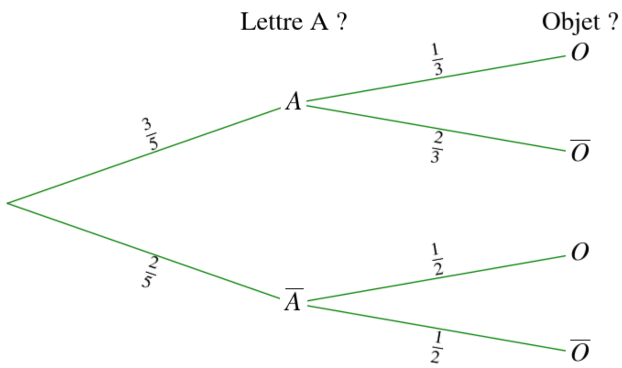
Voici la représentation du **seul** tirage

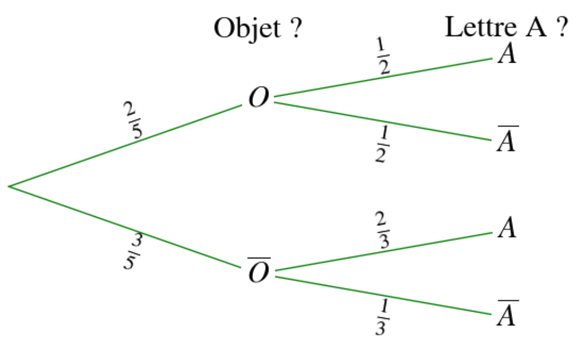


Maintenant une fois qu'on tiré un papier on peut se poser des questions sur le mot écrit :

- « *est-ce un nom d'animal ?* ». On note donc O l'événement « le mot tiré désigne un objet »
- « *le mot contient-il la lettre A ?* » On note donc A l'événement « le mot tiré contient un A »

Peu importe l'ordre dans lequel on se pose ces deux questions ! On peut construire deux arbres en étant toutefois très attentif aux probabilités que l'on porte sur les branches.





Les tableaux sont aussi des outils efficaces

	A	$\bar{A}$	Total
O	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$
$\bar{O}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$
Total	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	1

VIII. Défi : problème de Monty Hall (hors programme)

Dans un jeu télévisé, on peut gagner soit une voiture, soit une chèvre.

Il y a trois portes : l'une cache une voiture, les deux autres une chèvre. Les prix ont été répartis par tirage au sort.

Le jeu se déroule en quatre étapes :

1. Le joueur choisit une porte mais on ne lui dit pas ce qu'il y a derrière.

2. Le présentateur, qui sait où est la voiture, ouvre une porte
   - qui n'est pas celle choisie par le candidat
   - qui ne cache pas la voiture

3. Le présentateur demande alors au joueur d'arrêter définitivement son choix de porte (il a le droit de changer d'avis par rapport à son choix initial)

4. Le présentateur ouvre la dernière porte désignée par le candidat :
   - Si c'est une chèvre qui est derrière la porte choisie, le candidat repart chez lui avec la chèvre (c'est la chèvre de « ce gain » !)
   - Si c'est la voiture, le candidat a gagné la voiture.

Est-ce que la probabilité de gagner en changeant de porte est plus grande que la probabilité de gagner sans changer de porte ?