

En activité, en cette fin d'année, nous avons rencontré les arbres de probabilités au programme de toutes les premières : STMG, enseignement tronc commun, spé math, STI2D, ...

Nous allons reprendre la fin de cette activité à la lumière des notations de première.

Ex 1 Une entreprise fabrique des trottinettes. Chacune d'entre elles est fabriquée sur l'un des trois sites A, B ou C . Certaines d'entre elles sont défectueuses.

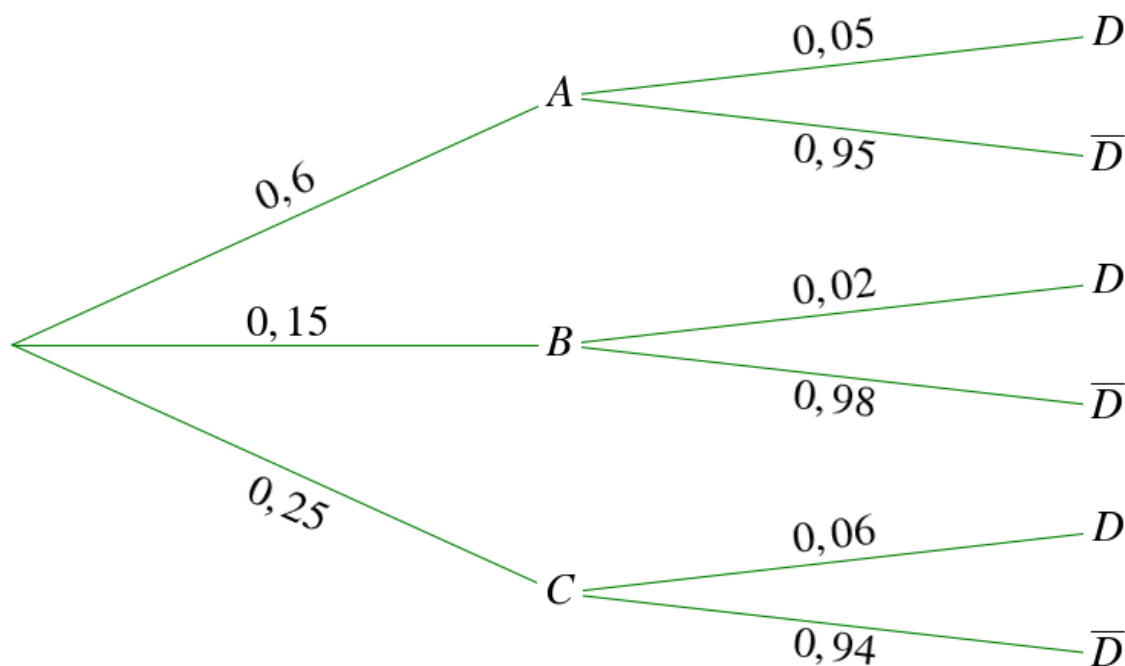
On note A : « la trottinette est fabriquée sur le site A »

B : « la trottinette est fabriquée sur le site B »

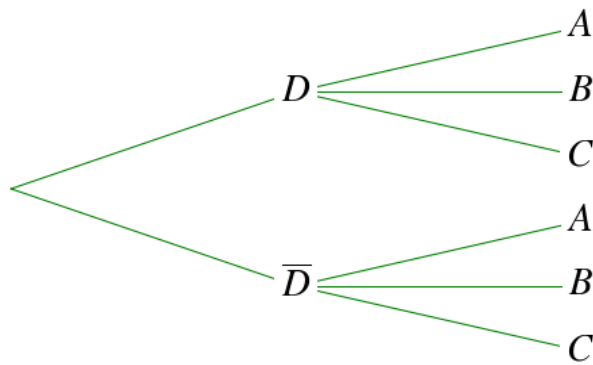
C : « la trottinette est fabriquée sur le site C »

D : « la trottinette est défectueuse »

Voici un arbre de probabilité, conditionné par le lieu de fabrication, correspondant à la situation.



- 1) Nous avons vu que chacune de ces probabilités peut se noter sur les modèles $P(B)$, $P_B(D)$, $P_D(B)$, ...
Par écrit, donner la notation adéquate pour les 9 probabilités.
Par oral, les interpréter dans la situation.
Recommencer en cas d'erreurs : c'est très important de ne pas se tromper.
- 2) Calculer $P(A \cap D)$; $P(A \cap \bar{D})$; $P(B \cap D)$; $P(B \cap \bar{D})$; $P(C \cap D)$; $P(C \cap \bar{D})$
Citer à chaque fois la formule mise en évidence. Interpréter le résultat dans la situation.
- 3) Calculer $P(D)$ et $P(\bar{D})$
- 4) Nous pouvons, aussi construire un autre arbre conditionné par l'état de la trottinette.
Sur chaque branche, porter la notation utilisée pour la probabilité



5) Calculer la probabilité de B sachant D

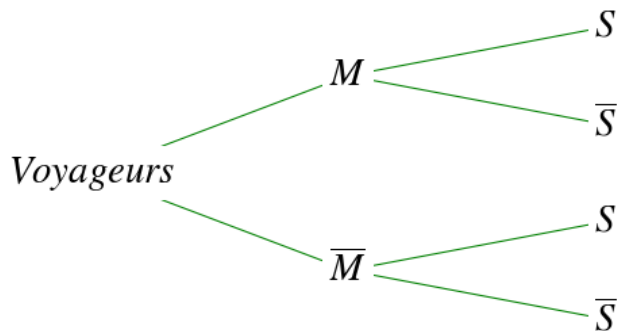
Ex 2 Dans un aéroport, les portiques de sécurité permettent de détecter les objets métalliques portés par les voyageurs. Une étude a montré que :

- 5 % des voyageurs portent un objet métallique au moment de franchir le portique.
- De plus, 4,9 % des passagers portent un objet métallique et déclenchent le portail de sécurité.
- Enfin, quand le passager ne porte pas d'objet métallique, le portique de sécurité sonne quand même dans 1 % des cas.

On choisit un passager au hasard. On considère les événements :

- S : « le portail sonne »
- M : « le passager porte un objet métallique »

1) Porter dans l'arbre, ci-dessous, les probabilités données dans l'énoncé (puis corriger cette question avant de faire la suite) ainsi que leur notation



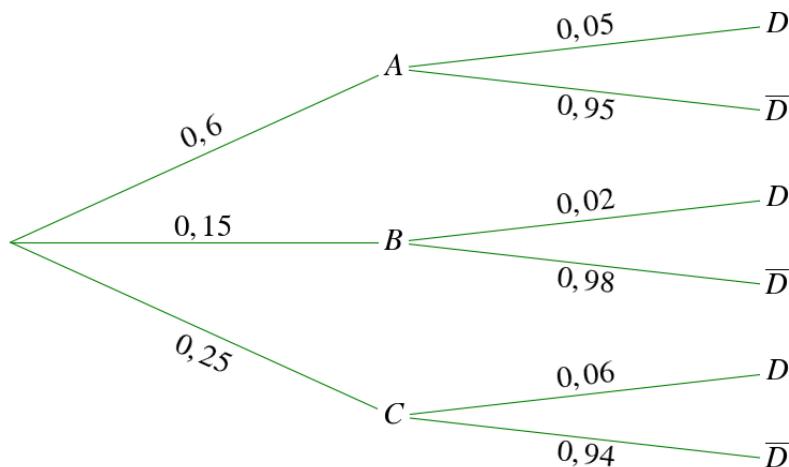
- 2) Calculer $P(S)$
- 3) Calculer la probabilité qu'un voyageur déclenche la sonnerie **sachant** qu'il porte un objet métallique
- 4) Calculer la probabilité qu'un voyageur porte un objet métallique **sachant** qu'il déclenche la sonnerie

Exercice 1

Question 1

Notation	Lecture	Interprétation dans la situation
$P(A) = 0,6$	La probabilité de A est 0,6	La probabilité que la trottinette provienne du site A se est de 0,25
$P(B) = 0,15$	La probabilité de B est 0,15	La probabilité que la trottinette provienne du site B est de 0,15
$P(C) = 0,25$	La probabilité de C est 0,25	La probabilité que la trottinette provienne du site C est de 0,25
$P_A(D) = 0,05$	La probabilité de D sachant A est 0,05	La probabilité que la trottinette soit défectueuse sachant qu'elle provient du site A est de 0,05
$P_A(\bar{D}) = 0,95$	La probabilité de $\bar{D}$ sachant A est 0,95	La probabilité que la trottinette fonctionne sachant qu'elle provient du site A est de 0,95
$P_B(D) = 0,02$	La probabilité de D sachant B est 0,02	La probabilité que la trottinette soit défectueuse sachant qu'elle provient du site B est de 0,02
$P_B(\bar{D}) = 0,98$	La probabilité de $\bar{D}$ sachant B est 0,98	La probabilité que la trottinette fonctionne sachant qu'elle provient du site B est de 0,98
$P_C(D) = 0,06$	La probabilité de D sachant C est 0,06	La probabilité que la trottinette soit défectueuse sachant qu'elle provient du site C est de 0,06
$P_C(\bar{D}) = 0,94$	La probabilité de $\bar{D}$ sachant C est 0,94	La probabilité que la trottinette fonctionne sachant qu'elle provient du site C est de 0,94

Question 2



Dans les arbres de probabilités, on multiplie le long des branches.

$$P(A \cap D) = P(A) \times P_A(D) = 0,6 \times 0,05 = 0,03$$

La probabilité que la trottinette soit défectueuse **et** provienne du site A est de 0,03

$$P(A \cap \bar{D}) = P(A) \times P_A(\bar{D}) = 0,6 \times 0,95 = 0,57$$

La probabilité que la trottinette fonctionne **et** provienne du site A est de 0,57

$$P(B \cap D) = P(B) \times P_B(D) = 0,15 \times 0,02 = 0,003$$

La probabilité que la trottinette soit défectueuse **et** provienne du site B est de 0,003

$$P(B \cap \bar{D}) = P(B) \times P_B(\bar{D}) = 0,15 \times 0,98 = 0,147$$

La probabilité que la trottinette fonctionne **et** provienne du site B est de 0,147

$$P(C \cap D) = P(C) \times P_C(D) = 0,25 \times 0,6 = 0,015$$

La probabilité que la trottinette soit défectueuse **et** provienne du site C est de 0,015

$$P(C \cap \bar{D}) = P(C) \times P_C(\bar{D}) = 0,25 \times 0,94 = 0,235$$

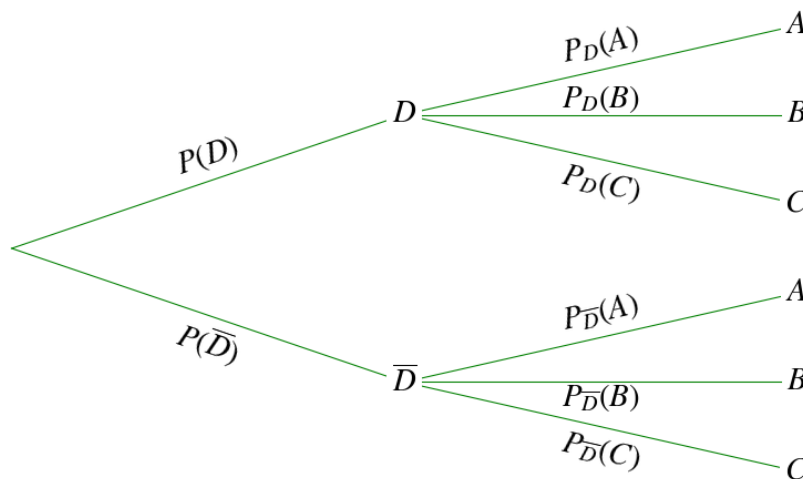
La probabilité que la trottinette fonctionne **et** provienne du site C est de 0,235

Question 3 Les trottinettes défectueuses sont réparties proviennent soit du site A, soit du site B, soit du site C
Ainsi, chaque trottinette défectueuse est comptée une et une seule fois dans $A \cap D$, dans $B \cap D$ ou dans $C \cap D$.

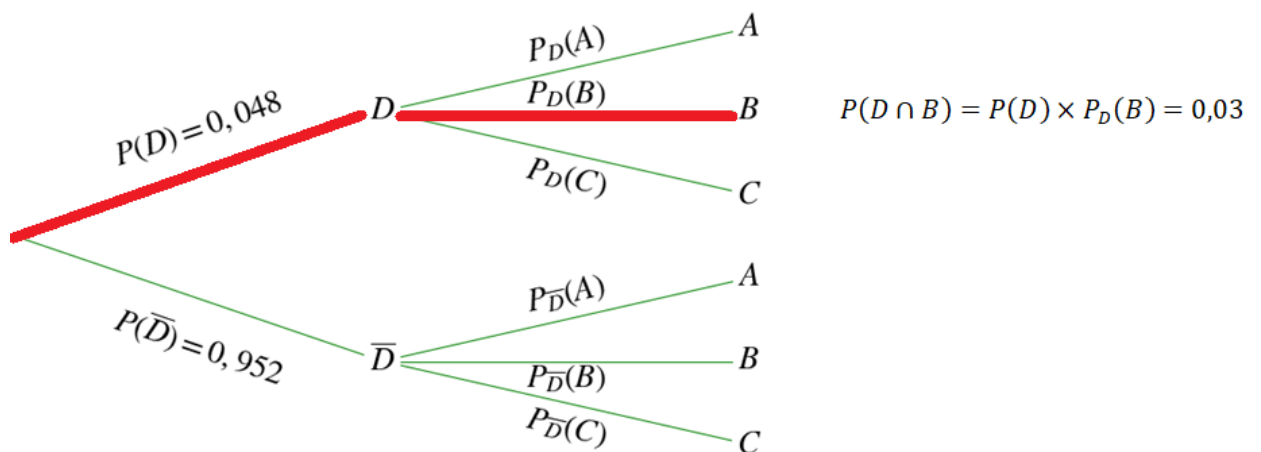
$$P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) + P(C \cap D) = 0,03 + 0,003 + 0,015 = 0,048$$

$$P(\bar{D}) = 1 - P(D) = 1 - 0,048 = 0,952$$

Question 4



Question 5



$$P(D \cap B) = P(D) \times P_D(B) \quad \text{donc} \quad P_D(B) = \frac{P(D \cap B)}{P(D)}$$

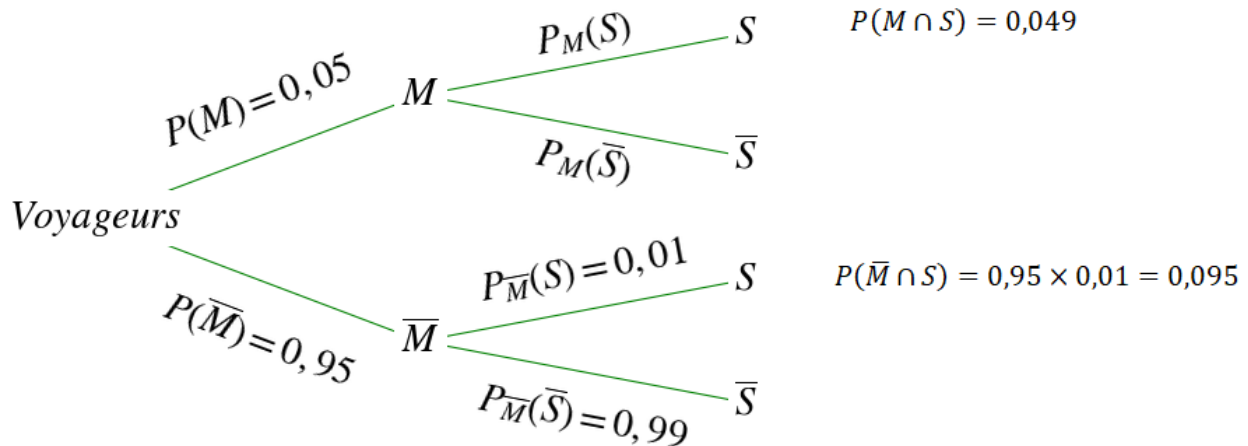
$$\text{or } P(D \cap B) = 0,03 \text{ et } P(D) = 0,048$$

$$\text{Donc } P_D(B) = \frac{P(D \cap B)}{P(D)} = \frac{0,03}{0,048} = 0,625$$

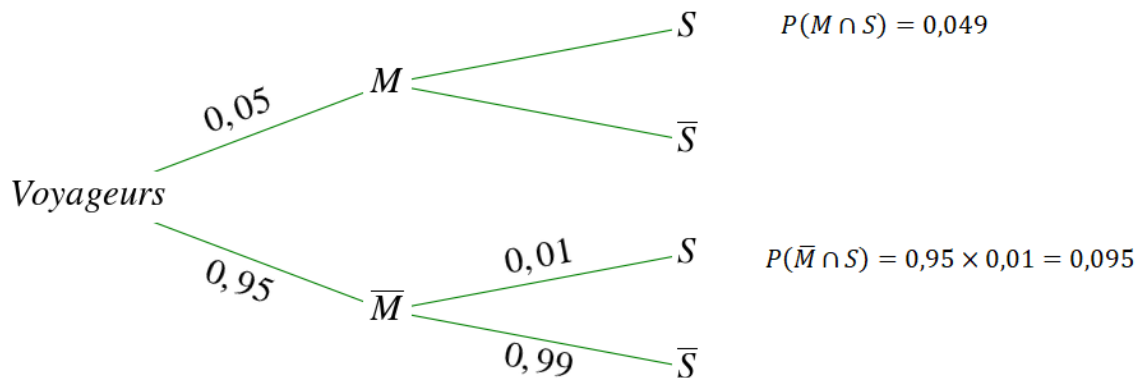
La probabilité de B sachant D est : 0,625

Exercice 2

Question 1



Question 2



Considérons un voyageur qui fait sonner le portail de sécurité :

- soit il porte un objet métallique donc il est une issue de $M \cap S$
- soit il ne porte pas un objet métallique donc il est une issue de $\bar{M} \cap S$

Tous les voyageurs sont comptabilisés une et une seule fois

$$\text{Ainsi : } S = (M \cap S) \cup (\bar{M} \cap S)$$

et en plus $(M \cap S) \cap (\bar{M} \cap S) = \emptyset$ (il n'y a pas de voyageur qui porte **et** qui ne porte un objet métallique)

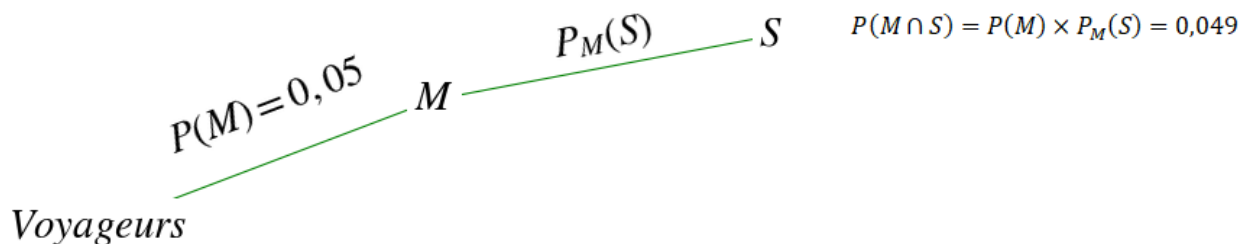
$$P(S) = P(M \cap S) + P(\bar{M} \cap S) = 0,049 + 0,095 = 0,0589$$

Rédaction de première :

Comme M et $\bar{M}$ forment une partition de l'univers, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(S) = P(M \cap S) + P(\bar{M} \cap S) = P(M \cap S) + P(\bar{M}) \times P_{\bar{M}}(S) = 0,049 + 0,95 \times 0,01 = 0,0589$$

Question 3



Dans l'arbre, on multiplie le long des branches : $P(M \cap S) = P(M) \times P_M(S)$

Donc $0,05 \times P_M(S) = 0,049$ donc $P_M(S) = \frac{0,049}{0,05} = 0,98$

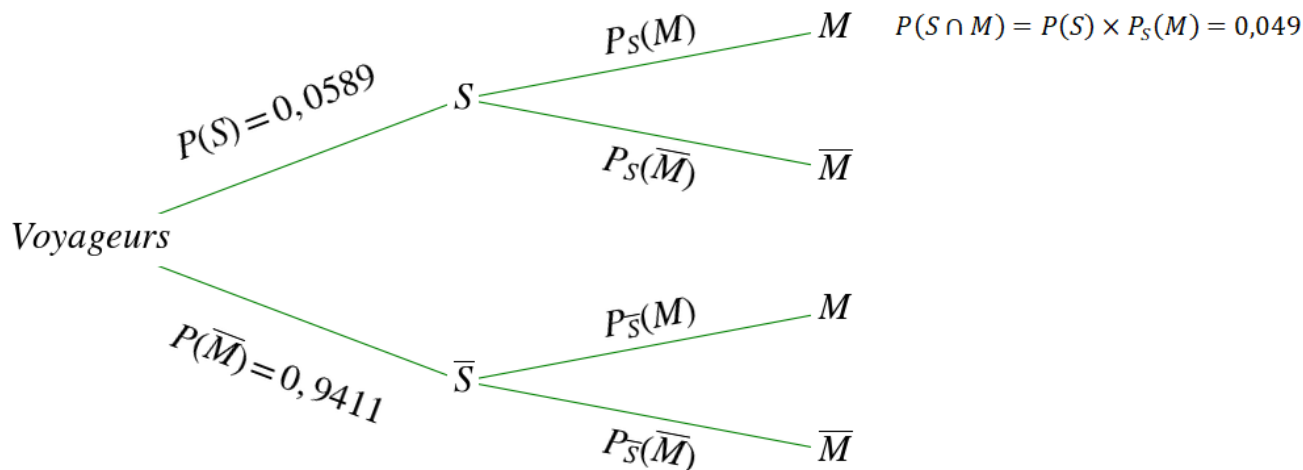
La probabilité qu'un voyageur déclenche la sonnerie sachant qu'il porte un objet métallique est de 0,98

Rédaction de première

D'après la formule d'une probabilité conditionnelle, $P_M(S) = \frac{P(M \cap S)}{P(M)} = \frac{0,049}{0,05} = 0,98$

Question 4

On peut construire un autre arbre en inversant le conditionnement :



$$P_S(M) = \frac{P(M \cap S)}{P(S)} = \frac{0,049}{0,0589} \approx 0,83$$

La probabilité qu'un voyageur porte un objet métallique sachant qu'il déclenche la sonnerie est de 0,83